Université Paul Sabatier 2017/2018

L2 Maths “Compléments de théorie des ensembles”

TD n^{o}4: Relations d’ordre

Exercice 1 On ordonne $\mathbf{N}^*$ par la relation $a|b$ (a divise b). Montrer que $\{a,b\}$ admet une borne inférieure et une borne supérieure et les reconnaître .

Exercice 2 On considère, dans un ensemble ordonné, des intervalles des diverses formes possibles: $[a,b]$, $]a,b]$, $[a,b[$, $]a,b[$, $[a,\rightarrow[$, $]a,\rightarrow[$, $]\leftarrow,b]$, $]\leftarrow,b[$. Décrire les intersections de deux tels intervalles.

Exercice 3 Montrer que dans $\mathbf{Q}$, aucun élément n’admet de successeur ni de prédécesseur; montrer qu’il en est de même dans $\mathbf{R}$.

Exercice 4 1) Soit $y \in \mathbf{Q}_+$ tel que $y^2 > 2$. Démontrer que $y' := \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{2}{y}\right)$ vérifie: $y' \in \mathbf{Q}_+$, $y' < y$ et $y'^2 > 2$. En déduire que l’ensemble $Y := \{x \in \mathbf{Q}_+ \mid x^2 > 2\}$ n’a pas de minimum.
2) Définir une bijection strictement décroissante entre $X := \{x \in \mathbf{Q}_+ \mid x^2 < 2\}$ et $Y := \{x \in \mathbf{Q}_+ \mid x^2 > 2\}$. En déduire que X n’a pas de plus grand élément.

Exercice 5 Montrer qu’il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de rationnels dont l’image est $\mathbf{Q}$ tout entier, autrement dit: $\mathbf{Q} = \{u_n \mid n \in \mathbf{N}\}$. Peut-on choisir la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ monotone ?

Exercice 6 Vérifier que, dans $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ muni de l’ordre produit ou de l’ordre lexicographique, toute suite décroissante est stationnaire. Dans chacun des cas, préciser si toute partie non vide admet un plus petit élément.

Exercice 7 1) On munit $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ de l’ordre lexicographique, pour lequel $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \le (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ si les deux suites sont égales ou s’il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $u_p < v_p$ et $\forall n < p$, $u_n = v_n$. Démontrer que c’est un ordre total.
2) Décrire l’unique relation d’ordre sur $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ telle que la bijection $\mathcal{P}(\mathbf{N}) \to \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ soit un strictement croissante.

Exercice 8 Soient I un ensemble totalement ordonné et (E_i) une famille d'ensembles ordonnés indexée par I. On munit $E := \prod_{i \in I} E_i$ de la relation $\mathcal{R}$ définie par:

$$(a_i)\mathcal{R}(b_i) \Leftrightarrow \exists i_0 \in I \;:\; a_{i_0} = b_{i_0} \text{ et } \forall i < i_0 \;,\; a_i = b_i.$$

Montrer que c'est une relation d'ordre strict.

Deuxième série (exercices facultatifs)

Exercice 9 On définit par récurrence $E_0 := \emptyset$ et $E_{k+1} := E_k \cup \{E_k\}$. Démontrer que la relation $x \in y$ est une relation d'ordre strict total sur chaque E_k ainsi que sur $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} E_k$.

Exercice 10 Soit E un ensemble dénombrable totalement ordonné n'admettant ni minimum ni maximum et tel que, si $a < b$, alors il existe c tel que $a < c < b$. Montrer que E est isomorphe à $\mathbf{Q}$.

Exercice 11 1) On dit qu'un ensemble ordonné est *noetherien* si toute suite croissante est stationnaire; ou, de manière équivalente, si toute partie non vide admet au moins un élément maximal. Montrer qu'un ensemble ordonné fini est noetherien et artinien, et que la réciproque est vraie si l'ensemble est supposé totalement ordonné.
2) Plus généralement, montrer qu'un ensemble ordonné E est noetherien et artinien si, et seulement si, toute chaîne de E (c'est-à-dire toute partie totalement ordonnée) est finie.
3) Montrer que l'ensemble des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie donné est noetherien et artinien, mais en général infini. Autre exemple: l'ensemble des entiers naturels ayant au plus N facteurs premiers comptés avec leur multiplicité (N arbitraire).

Exercice 12 1) Soit E un ensemble totalement ordonné et soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de E. On suppose que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ n'admet pas de plus grand élément. Démontrer: $\forall k \in \mathbf{N} \;,\; \exists \ell > k \;:\; u_k < u_\ell$. En déduire que, s'il existe un entier p tel que la suite $(u_n)_{n \geq p}$ n'admet pas de plus grand élément, alors la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ admet une sous-suite strictement croissante.
2) On suppose maintenant au contraire que, quel que soit l'entier p, la suite $(u_n)_{n \geq p}$ admet un plus grand élément et l'on note v_p ce dernier. Démontrer que la suite $(v_p)_{p \geq 0}$ est décroissante. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ admet une sous-suite décroissante.
3) Quelle conclusion générale peut-on tirer des deux questions précédentes au sujet des suites d'éléments de E ?
4) Selon le cours d'analyse, toute suite croissante majorée (resp. toute suite décroissante minorée) de réels admet une limite. Que peut-on en déduire pour les suites bornées de réels ?
